תורת הקבוצות, תרגיל 12

בתרגיל זה מותר להסתמך על אקסיומת הבחירה.

1. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. פונקציונל לינארי $f : V \to C$ הינו פונקציה כך שלכל $a, b \in V$ מתקיים $f(a+b) = f(a) + f(b)$ ובנוסף לכל $\alpha \in F$ ולכל $v \in V$ מתקיים $f(\alpha v) = \alpha f(v)$.
יהי W תת מרחב של V ויהי $L : W \to C$ פונקציונל לינארי. הוכח, כי ניתן להרחיב את L לפונקציונל לינארי $L' : V \to C$ המתלכד עם L על W.

2. תהי $(A, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית. תת קבוצה $B \subseteq A$ תיקרא קופינלית ב- A אם לכל $x \in A$ קיים $y \in B$ כך ש- $x \leq y$.
תהי X קבוצה סדורה לינארית. הוכח כי קיימת תת קבוצה Y של X שהיא קופינלית ב-X וסדורה היטב עם היחס המושרה ע"י היחס של X.

3. א. תהי $(A, \leq)$ קבוצה סדורה היטב עם איבר אחרון (כלומר, קיים $y \in A$ כך שלכל $x \in A$ מתקיים $x \leq y$).
הוכח, כי קיים ב- X איבר x שאינו עוקב כך שיש רק מספר סופי של איברים ב- X הגדולים מ- x.
(תזכורת: איבר x הוא עוקב אם קיים z כך ש- $z < x$ ולכל $w < x$ מתקיים $w \leq z$).
ב. הוכח כי כל קבוצה לא ריקה ניתנת לסידור טוב כך שבסדר המתקבל יהיה לה איבר אחרון.
ג. הוכח כי כל קבוצה אינסופית ניתנת לסידור טוב כך שבסדר המתקבל לא יהיה לה איבר אחרון.

4. א. תהיינה a, b, c עוצמות. הוכח, כי מתקיים $(a^b)^c = a^{bc}$.
ב. תהיינה α, β עוצמות כך ש $\alpha \leq \beta$. הוכח כי מתקיים $\alpha^\beta = 2^\beta$.

5. יהיו α, β, γ סודרים. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:
א. אם $\beta < \gamma$ אז $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.
ב. אם $\beta < \gamma$ אז $\beta + \alpha < \gamma + \alpha$.

תאריך ההגשה: 15.6.2005